

УДК 550.385.37

## ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ БАЛЛОННЫХ МОД И УСЛОВИЕ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ В ОКОЛОЗЕМНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2012 г. Н. Г. Мазур<sup>1</sup>, Е. Н. Федоров<sup>1</sup>, В. А. Пилипенко<sup>2</sup><sup>1</sup> ФГБУ науки Институт физики Земли РАН, г. Москва<sup>2</sup> ФГБУ науки Институт космических исследований РАН, г. Москва

e-mail: ngmazur@mail.ru

Поступила в редакцию 16.11.2010 г.

После доработки 12.01.2012 г.

Баллонные возмущения в плазме конечного давления, находящейся в криволинейном магнитном поле, описываются системой зацепленных уравнений для альвеновской и медленной магнитозвуковой мод. Наиболее простым и наглядным образом свойств этих возмущений можно характеризовать локальным дисперсионным соотношением, получаемым в приближении ВКБ. Это дисперсионное соотношение широко применяется для предсказания возможных неустойчивостей и спектральных свойств низкочастотных колебаний в ночной магнитосфере. Нами прослежен формальный вывод дисперсионного соотношения из исходной системы зацепленных МГД мод и переход к различным предельным случаям. Детально изучено поведение дисперсионных кривых различных ветвей колебаний, а также возможности для развития неустойчивостей и формирования областей нераспространения волн. Это позволило уточнить результаты предшествующих работ и даже указать на некорректности в некоторых из них. В частности, показано, что быстрая альвеновская ветвь колебаний всегда устойчива, а аperiodическая неустойчивость может возникать на медленной магнитозвуковой ветви колебаний.

### 1. ВВЕДЕНИЕ: БАЛЛОННЫЕ МОДЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В ОКОЛОЗЕМНОЙ ПЛАЗМЕ

Суббури – ключевое, но так еще и непонятое, явление в околоземном пространстве, сопровождаемое большим выделением энергии, инъекцией и ускорением частиц, активизацией полярных сияний и т.д. При этом ультранизкочастотные (УНЧ) волновые возмущения (периоды от первых секунд до десятков минут) не только осуществляют электродинамическую связь между различными областями околоземного пространства и оказываются дистанционными индикаторами различных фаз суббури, но и могут активно влиять на ее протекание. Ключевая дилемма физики околоземного пространства связана с определением положения области зарождения суббури: в хвосте магнитосферы в результате магнитного пересоединения или на квазидипольных силовых линиях в результате пока не отождествленной неустойчивости? К настоящему времени все большее число исследователей склоняется к мнению, что суббури начинается на квазидипольных силовых линиях, а пересоединение в хвосте магнитосферы является вторичным процессом. В качестве возможного триггера суббури часто предлагается баллонная (ballooning) неустойчивость [Miura et al., 1989; Ohtani and Tamao, 1993; Liu et al., 1995; Cheng, 2004; Agapitov et al., 2007].

Горячая плазма, давление которой спадает по радиальной координате  $L$  слишком резко, а именно как  $P \propto L^{-\alpha}$  с показателем  $\alpha > 4\gamma$  ( $\gamma$  – показатель политропы), оказывается неустойчивой относительно гидромагнитных желобковых возмущений. Если силовые линии вморожены в проводящие торцы магнитной ловушки, то чисто желобковые возмущения оказываются невозможными, и порог гидромагнитной конвективной неустойчивости повышается за счет дополнительного стабилизирующего слагаемого  $\propto \beta^{-1}$ . Расчеты для дипольной геометрии магнитного поля [Cheremnykh and Parnowski, 2004] дают  $\alpha = K_2 + K_1\beta^{-1}$ , где  $K_{1,2}$  – слабо зависящие от широты коэффициенты:  $K_2 \approx 5$ ,  $K_1 \approx 1$ . В отличие от конвективной неустойчивости, баллонная мода представляет собой не перестановочное движение силовой трубки в целом, а локально разбухающий “пузырь” горячей плазмы.

Теоретические работы по баллонной неустойчивости рассматривают систему зацепленных уравнений для полоидальных (мелкомасштабных в азимутальном направлении) альвеновских волн и медленных магнитозвуковых (ММЗ) волн в плазме конечного давления, находящейся в криволинейном магнитном поле. Описание баллонной неустойчивости, проведенное Ohtani and Tamao [1993] в ВКБ-приближении, привело к пороговому условию, которое по мнению авторов в

типичных условиях ночной магнитосферы не достигается.

В работе [Liu, 1997] указано на ошибку Ohtani and Tamao [1993] в продольной проекции уравнения движения, и получен более мягкий критерий неустойчивости

$$\beta_{\kappa_c \kappa_p} > k_{\parallel}^2, \quad (1)$$

где  $\beta = \beta_{\mu_2} PB^{-2}$  — отношение газокINETического давления к давлению магнитного поля,  $\kappa_c$  — кривизна силовой линии и  $\kappa_p = \partial_x \ln P$ . Подобное пороговое условие получается для баллонной неустойчивости в мультипольной магнитной ловушке, если под  $k_{\parallel}$  подразумевать  $\pi/l$ , где  $l$  — размер области с неблагоприятной кривизной [Михайловский, 1978]. Как видно из выражения (1) для порога, благоприятные условия для развития неустойчивости создаются на направленном к Земле резком градиенте давления плазмы  $\kappa_p < 0$  в области излома силовых линий (малый радиус кривизны  $R_c = |\kappa_c^{-1}|$ ). Неустойчивая плазма, удерживаемая искривленными силовыми линиями, стремится вырваться наружу и вытянуть силовые линии еще дальше. Характерное время взрывной фазы суббури  $\sim 1$  мин значительно меньше времени пробега альвеновского возмущения до ионосферы, поэтому в развитии неустойчивости проводящие торцы не должны играть существенной роли.

Такие условия возникают при сильно вытянутых в хвост магнитосферы силовых линиях перед началом взрывной фазы суббури [Zhu et al., 2009]. Другая возможная область для развития баллонной неустойчивости указана в работе [Golovchanskaya and Kullen, 2005]: высокоширотная граница между теплой плазмой плазменного слоя и холодной плазмой долей хвоста. Развитие неустойчивости в этой области может приводить к выбросам горячих филаментов в доли хвоста и образованию трансполярных дуг сияний в полярной шапке.

Получаемое при локальном анализе дисперсионное соотношение широко используется в геофизических приложениях не только для анализа устойчивости плазмы, но и для описания спектральных свойств низкочастотных волновых явлений в ночной авроральной магнитосфере. Дисперсионное соотношение в приближении ВКБ применялось для интерпретации распространения бухт аврорального риометрического поглощения, возможности полного внутреннего отражения альвеновских возмущений [Сафаргалеев и Мальцев, 1986; Mager et al., 2009], колебаний хвоста магнитосферы (flapping waves) [Golovchanskaya and Maltsev, 2005; Golovchanskaya and Mingalev, 2006].

Однако конкретный вид дисперсионного соотношения, использованного в разных работах, различался. В связи с этим было необходимо математически корректно проследить вывод дисперсионного соотношения из исходной системы зацепленных МГД мод и переход к различным предельным случаям, что и сделано в предлагаемой работе. Кроме того, подробно изучена зависимость дисперсионной кривой от параметров плазмы. Это позволяет уточнить теоретические представления о развитии суббури с точки зрения внутренней неустойчивости магнитосферной горячей плазмы.

## 2. МГД РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В 2D ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим ситуацию, когда либо горячая плазма удерживается искривленными силовыми линиями, либо внешняя тепловая плазма окружает полость, защищаемую магнитным полем. Пусть  $x, y, z$  — декартовы координаты, и  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, z)$  — равновесное магнитное поле с силовыми линиями, лежащими в плоскостях  $y = \text{const}$ . Введем локальный ортонормированный базис, связанный с криволинейной геометрией равновесного магнитного поля:  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{B}/B$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ , и введем обозначение для производных по направлениям базисных векторов:  $\nabla_n = \mathbf{e}_n \cdot \nabla$ . Операторы  $\nabla_1$  и  $\nabla_3$  коммутируют с  $\nabla_2$ , но не коммутируют между собой. Для них имеет место соотношение

$$\nabla_3 \nabla_1 = \nabla_1 \nabla_3 - \kappa_c \nabla_3 + (B^{-1} \nabla_3 B) \nabla_1, \quad (2)$$

которое будет использовано в дальнейшем. Неоднородности плазмы и магнитного поля характеризуются тремя параметрами: относительными градиентами  $\kappa_p = P^{-1} \nabla_1 P$  и  $\kappa_B = B^{-1} \nabla_1 B$  и кривизной силовой линии  $\kappa_c = \mathbf{e}_1 \cdot \nabla_3 \mathbf{e}_3$  ( $|\kappa_c| = R_c^{-1}$ ).

Условия равновесия плазмы со скалярным давлением  $P(x)$  выражаются уравнениями магнитостатики  $-\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , которые в рассматриваемом двумерном случае сводятся к соотношениям

$$\nabla_1 = JB, \quad \mu_0 \mathbf{J} = (-\nabla_1 B + \kappa_c B) \mathbf{e}_2. \quad (3)$$

Локальное условие равновесия можно записать и через  $\kappa$ -параметры:

$$(\beta/2)\kappa_p + \kappa_B - \kappa_c = 0. \quad (4)$$

## 3. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в равновесии смещение плазмы и электрическое поле отсутствуют. Тогда для гармоник возмущения  $\sim \exp(-i\omega t)$  линеаризованные уравнения МГД имеют вид

$$\mu_0 \partial \omega^2 \pi \xi = \mu_0 \nabla p + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{b}),$$

$$p = -\xi \cdot \nabla P - \gamma P \nabla \cdot \xi, \quad \mathbf{b} = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}), \quad (5)$$

где  $\rho$ ,  $P$ , и  $\mathbf{B}$  – равновесные плотность, давление и магнитное поле,  $\xi$  – смещение плазмы из положения равновесия,  $\mathbf{b}$  – возмущение магнитного поля,  $p$  – возмущение давления плазмы. Предполагается, что поперечный масштаб возмущений много больше ларморовского радиуса.

Исключая  $\mathbf{b}$  из (5) и переходя вместо  $\xi_3$  и  $p$  к новым неизвестным:  $u = \nabla \cdot \xi$ , характеризующей сжатие плазмы, и нормированному возмущению полного давления  $q = \mu_0 B^{-2}(p + Bb_3/\mu_0)$ , получим линейаризованные МГД уравнения для двумерного случая, которые для возмущений  $\propto \exp(ik_2 x_2)$  имеют вид

$$(\nabla_1 - \kappa_c) \xi_1 + i \varepsilon^{-1} k_2 \xi_2 - k_3^{-2} L_s u = 0,$$

$$(L_p + \beta \kappa_c \kappa_p) \xi_1 + \gamma \beta \kappa_c u + (\beta \kappa_p - \nabla_1) q = 0, \quad (6)$$

$$L_T \xi_2 - i \varepsilon^{-1} k_2 q = 0,$$

$$2 \kappa_c k_s^2 \xi_1 + L_c u + k_s^2 q = 0,$$

где  $L_p = \nabla_3 B^{-1} \nabla_3 B + k_A^2$  – полоидальный альвеновский оператор,  $L_T = B^{-1} \nabla_3 B \nabla_3 + k_A^2$  – тороидальный альвеновский оператор,  $L_s = B \nabla_3 B^{-1} \nabla_3 + k_s^2$  – магнитозвуковой оператор, и  $L_c = L_s + k_A^2$ . Здесь  $k_A = \omega/V_A$  – альвеновское волновое число,  $k_s = \omega/V_s$  – магнитозвуковое волновое число,  $k_c^2 = k_A^2 + k_s^2 = \omega^2/V_c^2$  и  $\beta = 2\gamma V_s^2/V_A^2$  – отношение давлений плазмы и магнитного поля;  $V_A = B(\mu_0 \rho)^{-1/2}$  – альвеновская скорость,  $V_s = (\gamma P/\rho)^{1/2}$  – скорость звука, и  $V_c = V_A V_s (V_A^2 + V_s^2)^{-1/2}$  – касповая скорость. Этот вид уравнений оказывается удобным для перехода к асимптотике при больших поперечных волновых числах. Система уравнений, полученная в работе [Cheng, 2002], в двумерном случае с точностью до обозначений совпадает с системой (6).

#### 4. АСИМПТОТИКА ПРИ БОЛЬШИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЛАХ

Исследуем асимптотику решений системы (6) для поперечно-мелкомасштабных возмущений, т.е. при  $k_\perp = (k_1^2 + k_2^2) \rightarrow \infty$ . Заменим для удобства оценки порядка величин  $k_1 \rightarrow k_1/\varepsilon$  и  $k_2 \rightarrow k_2/\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр. Асимптотику решения системы (6) будем искать в виде

$$y = (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \exp[i\theta(x_1)\varepsilon^{-1}]$$

$$(y = \xi_1, \xi_2 u, q), \quad (7)$$

что отражает большую величину “радиального” волнового числа  $\varepsilon^{-1} \nabla_1 \theta = \varepsilon^{-1} k_1$ . Собирая члены с одинаковыми степенями  $\varepsilon$ , получим в порядке  $\varepsilon^{-1}$  систему уравнений

$$k_1 \xi_{10} + k_2 \xi_{20} = 0, \quad k_1 q_0 = 0, \quad k_2 q_0 = 0, \quad (8)$$

из которой следует, что  $q_0 = 0$ , то есть возмущение полного давления  $q$  является малой величиной  $\ll \varepsilon$ . По существу, это означает отщепление быстрой магнитозвуковой волны.

Далее, в порядке  $\varepsilon^0$  имеем систему уравнений

$$ik_1 \xi_{11} + ik_2 \xi_{21} - \kappa_c \xi_{10} - k_s^{-2} L_s u_0 + \nabla_1 \xi_{10} = 0,$$

$$(L_p + \beta \kappa_c \kappa_p) \xi_{10} + \gamma \beta \kappa_c u_0 + \beta \kappa_p q_0 - \nabla_1 q_0 - ik_1 q_1 = 0, \quad (9)$$

$$L_T \xi_{20} - ik_2 q_1 = 0,$$

$$2 \kappa_c k_s^2 \xi_{10} + L_c u_0 + k_s^2 q_0 = 0.$$

Первое уравнение этой системы может быть использовано при дальнейшем уточнении решения для определения поправок первого приближения. Остальные три уравнения с помощью соотношений (8) приводятся к замкнутой системе уравнений нулевого приближения (опускаем индекс 0)

$$(L_p + \beta \kappa_c \kappa_p) \xi_1 - ik_1 q_1 + \gamma \beta \kappa_c u_0 = 0,$$

$$ik_1 L_T \xi_1 - k_2^2 q_1 = 0, \quad (10)$$

$$2 \kappa_c k_s^2 \xi_1 + L_c u_0 = 0.$$

Величина  $q_1$  относится к нулевому приближению, так как  $q_0 = 0$ .

Для полоидальных возмущений ( $k_1 = 0$ ) из первого соотношения (8) следует, что  $\xi_{20} = 0$ , а из второго уравнения системы (10) находим  $q_1 = 0$ , то есть при  $k_1 = 0$  величина  $q \approx \varepsilon^2$ . Тогда первое и третье уравнения (10) образуют замкнутую систему

$$(L_p + \beta \kappa_c \kappa_p) \xi_1 + \gamma \beta \kappa_c u_0 = 0, \quad (11)$$

$$2 \kappa_c k_s^2 \xi_1 + L_c u_0 = 0.$$

Для тороидальных возмущений ( $k_2 = 0$ ) из (8) получается, что  $\xi_{10} = 0$  и  $q_0 = 0$ . При этом надо вернуться к системе (9), поскольку при  $k_2 = 0$  второе уравнение системы (10) тождественно удовлетворяется. Последние два уравнения системы (9) представляют собой при  $k_2 = 0$  расцепленную систему:  $L_T \xi_{20} = 0$ ,  $L_c u_0 = 0$ . При этом из второго уравнения системы (9) находим  $q_1 = -ik_1^{-1} \gamma \beta \kappa_c u_0$ ,

т.е. в этом случае возмущение полного давления является малой величиной  $q \sim \varepsilon$ .

Заметим, что общая система нулевого приближения (10) не намного сложнее частного случая (11). Неизвестное  $q_1$  легко исключается с помощью второго уравнения системы (10), в результате чего получаем систему второго порядка [Klimushkin, 1998]

$$(L_P + k_1^2 k_1^{-2} L_T + \beta \kappa_c \kappa_P) \xi_1 + \gamma \beta \kappa_c u = 0, \quad (12)$$

$$2\kappa_c k_s^2 \xi_1 + L_c u = 0.$$

## 5. ЛОКАЛЬНОЕ ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть возмущение имеет малый масштаб не только по  $x_1, x_2$ , но и по  $x_3$ , так что и зависимость от координаты  $x_3$  ищем в приближении геометрической оптики  $\propto \exp(ik_{\parallel} x_3)$  с  $k_{\parallel} \rightarrow \infty$ . Операторы в (12) превращаются в числовые множители:  $L_P = L_T = L_A = k_A^2 - k_{\parallel}^2$ ,  $L_c = k_c^2 - k_{\parallel}^2$ , и (12) теперь становится алгебраической системой. Приравняв ее определитель нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^4 - [(V_A^2 + V_c^2)k_{\parallel}^2 + \kappa_c 4\kappa_c V_c^2 - \beta \kappa_P V_A^2 \sin^2 \alpha] \times \omega^2 + V_A^2 + V_c^2 k_{\parallel}^4 - \beta \kappa_c \kappa_P V_A^2 V_c^2 k_{\parallel}^2 \sin^2 \alpha = 0, \quad (13)$$

где  $\alpha$  – угол между  $\mathbf{k}_{\perp}$  и ортом  $\mathbf{e}_1$ , то есть  $\sin^2 \alpha = (k_2^2 + k_3^2) / (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$ . Полученное уравнение (13) является обобщением локального дисперсионного соотношения [Liu, 1997] для косых возмущений  $\sin \alpha \neq 1$ . Корни уравнения (13) имеют вид

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{V_A^2}{2 + \gamma \beta} \times \quad (14)$$

$$\times [(1 + \gamma \beta)k_{\parallel}^2 + H \pm \sqrt{(k_{\parallel}^2 + H)^2 + 4\gamma^2 \beta^2 \kappa_c^2 k_{\parallel}^2 \sin^2 \alpha}],$$

где  $H = \beta \kappa_c [2\gamma \kappa_c - \kappa_P(2 + \gamma \beta)/2] \sin^2 \alpha$ . Поскольку дискриминант биквадратного уравнения (13) положителен при  $k_{\parallel}^2 > 0$ , то корни  $\omega_{\pm}^2$  вещественны для вещественных  $k_{\parallel}$ , как и следовало ожидать в рамках идеальной МГД. Таким образом,  $\omega$  может быть или вещественным, или чисто мнимым (последний случай соответствует аperiodической неустойчивости). Соотношение (14) описывает две ветви: быструю (знак плюс) и медленную (знак минус). При  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\omega_+ \rightarrow \omega_A$ , т.е. быстрая ветвь переходит в альвеновские волны, а  $\omega_- \rightarrow 0$ . Укажем ряд важных свойств дисперсионного соотношения (14).

Величина  $\omega_{\pm}^2$  неотрицательна при вещественном  $k_{\parallel}$  и обращается в нуль только при  $k_{\parallel} = 0$ :

$$\omega_{\pm}^2 = V_A^2 (2 + \gamma \beta)^{-1} (\gamma \beta k_{\parallel}^2 + k_{\parallel}^2 + H + |k_{\parallel}^2 + H|) \geq V_A^2 \gamma \beta k_{\parallel}^2 (2 + \gamma \beta)^{-1}.$$

Следовательно, быстрая ветвь  $\omega_{\pm}^2(k_{\parallel})$  устойчива при любых  $k_{\parallel}$ . Встречающиеся иногда утверждения о возможности возбуждения альвеновских волн (т.е. быстрой ветви) в результате развития баллонной неустойчивости [Miura et al., 1989; Ohtani and Tamao, 1993] являются некорректными.

Неустойчивой может быть только медленная ветвь. Нижний корень  $\omega_-^2(k_{\parallel})$  отрицателен при условии

$$k_{\parallel}^2 < \beta \kappa_c \kappa_P \sin^2 \alpha. \quad (15)$$

Это неравенство – обобщение условия аperiodической неустойчивости (1) [Liu, 1997]. Оно показывает, что для косых возмущений ( $k_1 \neq 0$ ) порог неустойчивости по  $\beta$  или  $\kappa_P$  выше. Нулевая действительная часть частоты означает, что плазма не обладает упругостью по отношению к этим возмущениям.

Из точного выражения (14) при  $k_{\parallel} \gg \kappa_c \sin \alpha$  получаются асимптотические формулы для мелкомасштабных в продольном направлении колебаний

$$\omega_+^2 = V_A^2 [k_{\parallel}^2 + \beta(2\gamma - R)\kappa_c^2 \sin^2 \alpha - \gamma^2 \beta^2 (2\gamma - R)\kappa_c^2 \sin^2 \alpha k_{\parallel}^{-2} + O(k_{\parallel}^{-4})], \quad (16)$$

$$\omega_-^2 = V_c^2 [k_{\parallel}^2 - 2\gamma \beta - R\kappa_c^2 \sin^2 \alpha + \gamma \beta^2 (2 + \gamma \beta)(2\gamma - R)\kappa_c^4 \sin^4 \alpha k_{\parallel}^{-2} + O(k_{\parallel}^{-4})]. \quad (17)$$

Здесь введен параметр  $R = \kappa_P / \kappa_c$ ; по абсолютной величине  $|R| = R_c / a$  – отношение радиуса кривизны к масштабу неоднородности плазмы  $a = |\kappa_P|^{-1}$ . Только в рассматриваемом предельном случае дисперсионное соотношение (14) для быстрой ветви имеет вид линейной функции от  $V_A^2$ :  $\omega_+^2 = V_{\parallel}^2 k_A^2 + \omega_g^2$ , который часто используется в геофизических приложениях.

Рассмотрим случай горячей плазмы  $\beta \rightarrow \infty$ . В силу условия равновесия (4) величина  $\kappa_P$  обратно пропорциональна  $\beta$ :  $\beta \kappa_P = 2(\kappa_c - \kappa_B)$ . С учетом этого при  $\beta \gg 1$  имеем

$$H \approx \beta \kappa_c (2\gamma \kappa_c - \gamma \beta \kappa_P / 2) \sin^2 \alpha = \gamma \beta \kappa_c (\kappa_c + \kappa_B) \sin^2 \alpha,$$

и дисперсионное соотношение (14) в пределе  $\beta \rightarrow \infty$  переходит в соотношение, полученное в работах [Liu, 1997] (для  $\sin^2 \alpha = 1$ ) и [Golovchanskaya and Mingalev, 2006]

$$\omega_{\pm}^2 = V_A^2 \left[ k_{\parallel}^2 + \kappa_c^2 (\kappa_c + \kappa_B) \sin^2 \alpha \pm \sqrt{\kappa_c^2 (\kappa_c + \kappa_B)^2 \sin^2 \alpha + 4k_{\parallel}^2 \kappa_c^2 \sin^2 \alpha} \right],$$

которое справедливо при условии  $k_{\parallel} \ll \gamma \beta \kappa_c \sin \alpha$ .

## 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСИОННОЙ КРИВОЙ

Дисперсионная кривая (14) представляет собой гиперболу в плоскости  $k_{\parallel}^2$ ,  $\omega^2$ , положение и форма которой зависят от параметров  $R$  и  $\beta$  и от угла  $\alpha$ . Левая часть дисперсионного уравнения (13) представляет собой однородный полином 4-й степени относительно переменных  $\omega$ ,  $k_{\parallel}$  и  $\sin \alpha$ . Поэтому зависимость соотношения (14) от параметра  $\sin \alpha$  очень проста: график при  $\sin^2 \alpha < 1$  получается из графика  $\omega_{\pm}^2(k_{\parallel})$  при  $\sin^2 \alpha = 1$  растяжением обеих осей в  $(\sin \alpha)^{-1}$  раз.

Введем безразмерные волновое число  $\kappa_{\parallel} = k_{\parallel}(\kappa_c \sin \alpha)^{-1}$  и частоту  $\Omega = \omega(\kappa_c V_A \sin \alpha)^{-1}$ . Тогда соотношение (14) будет зависеть реально только от двух параметров  $\beta$  и  $R = \kappa_B/\kappa_c$ :

$$\Omega_{\pm}^2 = (2 + \gamma\beta)^{-1} \times [(1 + \gamma\beta)\kappa_{\parallel}^2 + h \pm \sqrt{(k_{\parallel}^2 + h)^2 + 4\gamma^2\beta^2\kappa_{\parallel}^2}], \quad (18)$$

где нормированная величина  $h = H/\kappa_c^2 = \beta(2\gamma - R - \gamma\beta R/2)$ . Представим (18) в виде, явно содержащем координаты центра гиперболы  $\kappa_0^2$ ,  $\Omega_0^2$ .

$$\Omega_{\pm}^2 = \Omega_0^2 + (2 + \gamma\beta)^{-1} \times [(1 + \gamma\beta)(\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_0^2) \pm \sqrt{(\kappa_{\parallel}^2 - \kappa_0^2)^2 + M}], \quad (19)$$

где  $\kappa_0^2 = -\gamma^2\beta^2 + \beta(1 + \gamma\beta/2)(R - 2\gamma)$ ,  $\Omega_0^2 = (\gamma\beta\kappa_0^2 - 2\gamma^2\beta^2)(2 + \gamma\beta)^{-1} = \gamma\beta^2(R - 4\gamma)/2$ , и  $M = \min D(k_{\parallel}^2) = 2\gamma^2\beta^3(2 + \gamma\beta)(R - 2\gamma)$ . Асимптотами гиперболы (19) при  $\kappa_{\parallel} \rightarrow \infty$  служат прямые

$$\Omega^2 = \kappa_{\parallel}^2 - \beta(R - 2\gamma) \text{ и} \quad (20)$$

$$\Omega^2 = \gamma\beta(2 + \gamma\beta)^{-1}(\kappa_{\parallel}^2 - 2\gamma\beta),$$

пересекающиеся в точке  $(\kappa_0^2, \Omega_0^2)$ . Наклонам этих прямых с учетом принятой нормировки частоты и волнового числа отвечают квадраты альвеновской и касповой скорости. Правые части соотношений (20), разумеется, совпадают с двумя первыми членами разложений (16) и (17).

При  $R = 2\gamma$  первая из асимптот (20) проходит через начало координат. Значение параметра  $R = 2\gamma$  является критическим: гипербола (19) вырождается в пару пересекающихся прямых (20). При  $R < 2\gamma$ , когда  $M < 0$ , гипербола (19) располагается внутри острых углов между асимптотами и имеет точки ветвления – нули функции  $D(\kappa_{\parallel}^2)$ :

$$\kappa_{\parallel}^2 = \kappa_0^2 \pm \sqrt{-M}. \quad (21)$$

В области  $R > 2\gamma$ , когда  $M > 0$  и  $D(\kappa_{\parallel}^2) > 0$  на всей оси  $\kappa_{\parallel}^2$ , гипербола (19) переходит в тупые углы между асимптотами и точки ветвления исчезают (становятся мнимыми).

Важным свойством дисперсионной кривой (13) является то, что она всегда проходит через начало координат в плоскости  $\kappa_{\parallel}^2$ ,  $\omega^2$ . Полагая  $\kappa_{\parallel}^2 = 0$  в (18), найдем

$$\Omega_{\pm}^2(0) = (h \pm |h|)(2 + \gamma\beta)^{-1}, \quad (22)$$

то есть при  $h \geq 0$  через начало координат проходит нижняя ветвь, а при  $h \leq 0$  начало координат оказывается уже на верхней ветви. Переход с ветви на ветвь происходит при  $h = 0$ , то есть при  $R = 4\gamma(2 + \gamma\beta)^{-1}$  – это значение параметра  $R$  находится в промежутке между 0 и  $2\gamma$ . При  $R < 2\gamma$  через начало координат проходит та часть гиперболы, которая располагается справа от центра, а при  $R > 2\gamma$  через начало координат проходит верхняя часть гиперболы.

Для оценки максимального инкремента неустойчивости волн представляет интерес положение в плоскости  $\kappa_{\parallel}^2$ ,  $\Omega^2$  точки минимума функции  $\Omega_{\pm}^2(\kappa_{\parallel}^2)$  и точки ветвления  $(\kappa_{\parallel}^2, \Omega^2)$ , в которой ветви  $\Omega_{\pm}^2(\kappa_{\parallel}^2)$  и  $\Omega_{\pm}^2(\kappa_{\parallel}^2)$  соединяются:  $\Omega_{\pm}^2(\kappa_{\parallel}^2) = \Omega^2$ . Очевидно, эти точки существуют только при  $R < 2\gamma$ . Минимум функции  $\Omega_{\pm}^2(\kappa_{\parallel}^2)$  равен

$$\min \Omega^2 = \gamma^2\beta^2(\lambda - 1)^2 \quad (23)$$

и достигается при  $\kappa_{\parallel}^2 = \kappa_{\min}^2 = -\gamma\beta(2 + \gamma\beta)(\lambda - 1) \times (\lambda - u_c)$ , где  $\lambda = (1 - R/2\gamma)^{1/2}$  и  $u_c = \gamma\beta(2 + \gamma\beta)^{-1} = V_c^2/V_A^2$ . Величина  $\min \Omega^2$  обращается в нуль при  $R = 0$ , а для всех других значений  $R$  она отрицательна. Точка  $\kappa_{\min}^2$  по мере роста  $R$  сначала движется вправо, проходя через нуль при  $R = 0$ , достигает крайне правого положения  $\kappa_{\parallel}^2 = \max_{\lambda} \kappa_{\min}^2(\lambda) = u_c$  при  $R = 2\gamma[1 - (1 + u_c)^2/4]$ , после чего движется об-

ратно, проходя через нуль при  $R = 2\gamma(1 - u_c^2)$ , и приходит в точку  $\kappa_{\parallel}^2 = -\gamma^2\beta^2$  при  $R = 2\gamma$  – в момент вырождения гиперболы в пару прямых.

Правая точка ветвления определяется формулой (21) со знаком +, которая имеет координаты

$$\begin{aligned} \overline{\kappa_{\parallel}^2} &= -s^2, \quad \overline{\Omega^2} = -u_c(2s + s^2) \\ (s &= \gamma\beta - [\beta(2 + \gamma\beta)(\gamma - R/2)]^{1/2}). \end{aligned} \quad (24)$$

Точка ветвления  $(\overline{\kappa_{\parallel}^2}, \overline{\Omega^2})$  с ростом  $R$  вначале смещается вправо, но это происходит лишь пока  $R < 4\gamma(2 + \gamma\beta)^{-1}$ . При  $R = 4\gamma(2 + \gamma\beta)^{-1}$  точка ветвления достигает своего крайне правого положения, совпав при этом с началом координат. При дальнейшем росте  $R$  точка ветвления идет влево, и начало координат оказывается уже на верхней ветви  $\Omega_+^2(\kappa_{\parallel}^2)$ . В конце концов, при  $R \rightarrow 2\gamma$  точка ветвления исчезает в точке пересечения асимптот  $(-\gamma^2\beta^2, -\gamma^2\beta^2)$ .

## 7. ЗАВИСИМОСТЬ ДИСПЕРСИОННОЙ КРИВОЙ В ПЛОСКОСТИ $\kappa_{\parallel}^2, \omega^2$ ОТ ПАРАМЕТРА $R$

Проследим последовательно за движением гиперболы (19) при изменении параметра  $R$ , отмечая те значения, при которых происходят ее качественные изменения, важные с точки зрения дисперсионных свойств системы. На рисунке 1 представлено семейство гипербол (19) для  $\beta = 1$  при изменении параметра  $R$  в области  $R \leq 2\gamma$ . При расчетах для всех рисунков принято, что колебания плазмы адиабатические, т.е. показатель  $\gamma = 5/3$ .

При  $R < 0$  гипербола (19) проходит через начало координат своей нижней ветвью  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2)$ ; наклон ее в этой точке положителен, так как  $\kappa_{\min}^2 < 0$ . С ростом  $\kappa_{\parallel}^2$  наклон выпуклой кривой  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2)$  только возрастает, поэтому и вся ветвь  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2) > 0$  для  $\kappa_{\parallel}^2 > 0$ . Таким образом, при  $R < 0$  ветвь  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2)$  устойчива. Тем более устойчива альвеновская ветвь  $\Omega_+^2(\kappa_{\parallel}^2) > \Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2) > 0$ .

Отметим, что при  $\Omega^2$  в промежутке  $0 < \Omega^2 < \Omega_+^2$  мы имеем  $\Omega^2 < 0$  – на частотах ниже  $\Omega_+$  волны альвеновского типа не распространяются. Величина квадрата нормированной частоты отсечки, согласно (22), определяется формулой

$$\begin{aligned} \Omega_*^2 &= \Omega_+^2(0) = 2h(2 + \gamma\beta)^{-1} = \\ &= \beta[4\gamma((2 + \gamma\beta)^{-1} - R)], \end{aligned} \quad (25)$$

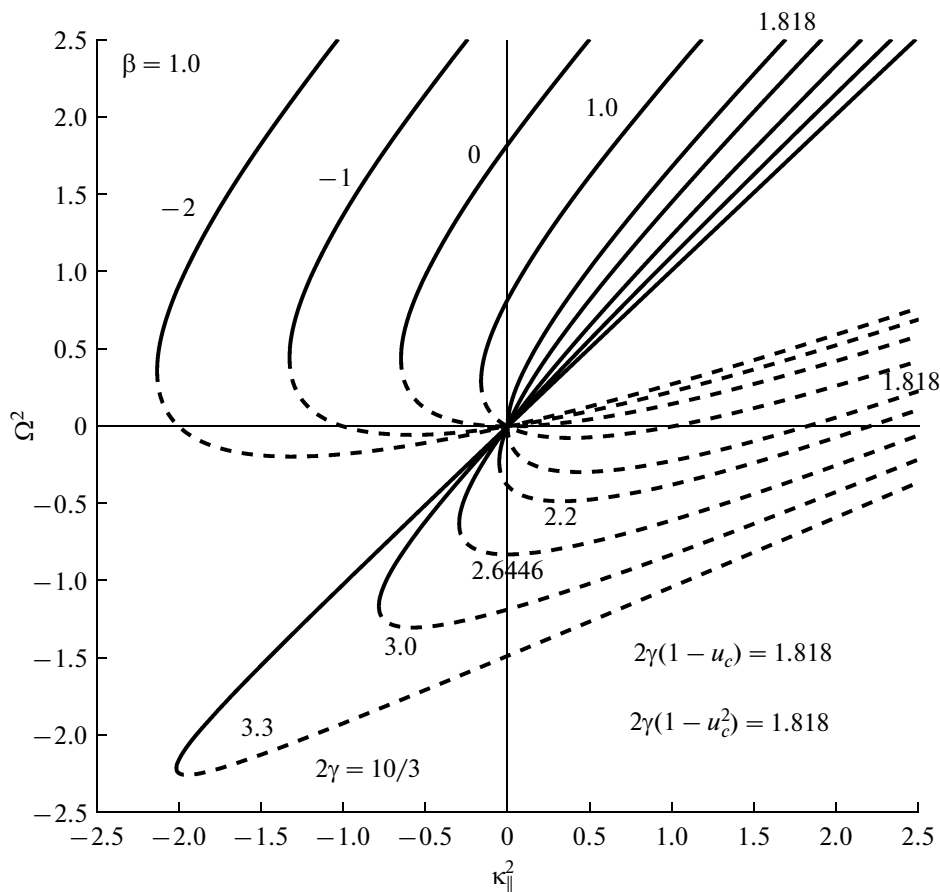
справедливой при  $R < 4\gamma(2 + \gamma\beta)^{-1}$ , то есть пока  $\Omega_+^2(0) > 0$ . При  $R = 0$  гипербола (19) касается оси  $\kappa_{\parallel}^2$  в начале координат, а при дальнейшем росте  $R$  минимум функции  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2)$  смещается на положительную полуось, и здесь возникает интервал  $0 < \kappa_{\parallel}^2 < \beta R$ , в котором  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2) < 0$ , то есть медленная ветвь оказывается неустойчивой. Минимум функции  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel}^2)$ , отвечающий максимуму инкремента неустойчивости, определяется формулой (23).

По достижении параметром  $R$  значения  $R = 4\gamma(2 + \gamma\beta)^{-1} = 2\gamma(1 - u_c)$  гипербола (19) оказывается целиком в правой полуплоскости, касаясь оси  $\Omega^2$  в начале координат. В этот момент область непрозрачности исчезает; начало координат переходит на верхнюю ветвь. При  $R > 2\gamma(1 - u_c)$  точка минимума  $\kappa_{\min}^2$  опять уходит на отрицательную полуось  $\kappa_{\parallel}^2 < 0$ , то есть максимум инкремента неустойчивости закрепляется при  $\kappa_{\parallel}^2 = 0$ . Квадрат этого максимума определяется, согласно (22), выражением  $\mu^2 = -\Omega_-^2 = -2h(2 + \gamma\beta)^{-1} = \beta[R - 4\gamma(2 + \gamma\beta)^{-1}]$ . По мере приближения  $R$  к критическому значению  $2\gamma$  гипербола (19) “заостряется” и при  $R = 2\gamma$  вырождается в пару прямых (20). После этого при  $R > 2\gamma$  дисперсионная кривая (19) состоит из не связанных между собой ветвей, которые расположены сверху и снизу от асимптот (20).

В продольно-однородном магнитном поле с силовыми линиями постоянной кривизны  $r = R_c = -\kappa_c^{-1} = \text{const}$  условие гидромагнитной устойчивости плазмы [Кадомцев, 1963] имеет вид  $r\partial \ln P / \partial r + 2\gamma > 0$ , то есть  $-\kappa_p / \kappa_c + 2\gamma > 0$ . Таким образом, важная роль значения параметра  $R \equiv \kappa_p / \kappa_c = 2\gamma$  в поведении дисперсионных кривых может быть связана с переходом через порог гидромагнитной устойчивости. Поэтому значения  $R > 2\gamma$  могут не иметь смысла, так как они соответствуют гидромагнитно-неустойчивой плазме, и в дальнейшем этот случай подробно рассматриваться не будет.

## 8. ЗАВИСИМОСТЬ ВЕТВЕЙ $\Omega_{\pm}^2(\kappa_{\parallel})$ ОТ ПАРАМЕТРА $\beta$

Теперь опишем поведение дисперсионной кривой при изменении величины  $P$  по отношению к давлению магнитного поля при действительных  $\kappa_{\parallel}$ . Поведение дисперсионной кривой при изменении  $\beta$  качественно определяется асимптотиками (20) и движением точки кривой на оси ординат  $\Omega^2 = \Omega_{\pm}^2$  (начало кривой). Значе-

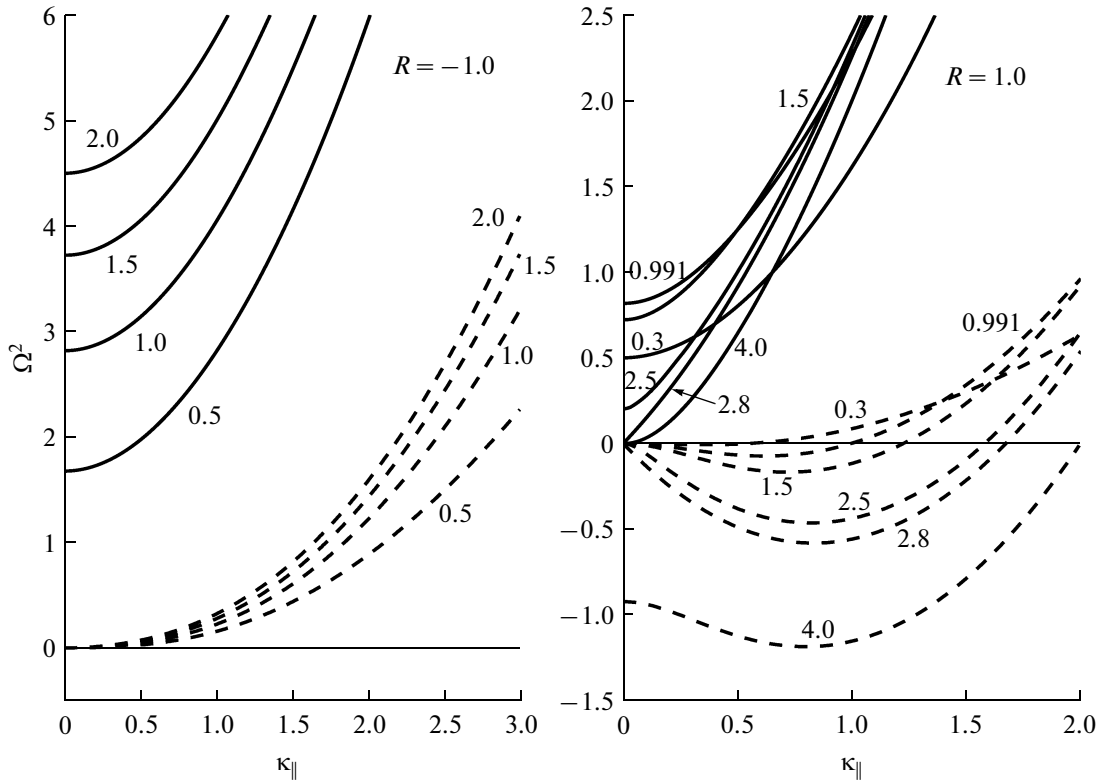


**Рис. 1.** Поведение ветвей  $\Omega_+^2(k_{\parallel})$  (сплошная линия) и  $\Omega_-^2(k_{\parallel})$  (штриховая линия) в плоскости  $k_{\parallel}^2, \omega^2$  в зависимости от параметра  $R = \kappa_p/\kappa_c$  при  $\beta = 1$  (значения  $R$  проставлены около кривых). Область  $k_{\parallel}^2 < 0$  соответствует области нераспространения (непрозрачности) для быстрой (альвеновской) ветви колебаний.

ние  $\Omega_{\pm}^2(0)$ , согласно (22), очень просто выражается через величину  $h$ , зависимость которой от  $\beta$  удобно теперь представить в виде  $h = \gamma\beta R (\beta_0 - \beta)/2$ , где  $\beta_0 = 4/R - 2/\gamma$ . Из (22) следует, что при  $h < 0$  значение  $\Omega_+^2 \equiv 0$ , а  $\Omega_-^2(0)$  пропорционально  $h$ , и при  $h = 0$  обе величины  $\Omega_{\pm}^2(0) = 0$ . При переходе в область  $h > 0$ , наоборот,  $\Omega_+^2(0)$  начинает расти пропорционально  $h$ , а  $\Omega_-^2(0) \equiv 0$ .

Пусть  $R < 0$  ( $\kappa_p$  и  $\kappa_c$  разных знаков); тогда  $\beta_0 < 0$ , так что  $h(\beta)$  монотонно возрастает от нуля при  $\beta = 0$ . Пример для случая  $R < 0$  показан на рис. 2а. Начало быстрой ветви поднимается с ростом  $\beta$  вверх по положительной полуоси, а медленная ветвь при любом  $\beta$  выходит из начала координат. Обе ветви  $\Omega_{\pm}^2(k_{\parallel})$  устойчивы и монотонно возрастают с ростом  $k_{\parallel}$ .

В области положительных  $R$  (знаки  $\kappa_p$  и  $\kappa_c$  совпадают) поведение ветвей меняется при переходе через значение  $R = 2\gamma$ , при котором  $\beta_0 = 4/R - 2/\gamma$  меняет знак. Для  $R$  в промежутке  $0 < R < 2\gamma$  функция  $h(\beta)$  немонотонна и меняет знак при переходе через  $\beta = \beta_0$  — поэтому поведение ветвей в зависимости от  $\beta$  выглядит несколько сложнее. Начало быстрой ветви при возрастании  $\beta$  поднимается от начала координат до максимума при  $\beta = 2\gamma^{-1}(\sqrt{2\gamma^{-1}/R} - 1)$ , равного  $\max_{\beta} \Omega_+^2(k_{\parallel} = 0) = 4(1 - \sqrt{R/2\gamma})^2$ , а затем опять опускается в начало координат, где и остается при  $\beta \geq \beta_0$ . Начало нижней ветви, наоборот, при  $\beta \leq \beta_0$  совпадает с началом координат, а при  $\beta > \beta_0$  начинает опускаться вниз. Медленная ветвь имеет область значений  $k_{\parallel}$ , где  $\Omega_-^2 < 0$ , то есть эта мода неустойчива. Эта область — промежуток  $k_{\parallel}^2 < \beta R$ , что соответ-



**Рис. 2.** Поведение ветвей  $\Omega_+^2(\kappa_{\parallel})$  (сплошная линия) и  $\Omega_-^2(\kappa_{\parallel})$  (штриховая линия) в зависимости от параметра  $\beta$ : (а) при  $R = -1$  (устойчивая плазма); (б) при положительном  $R = 1$ . Значения  $\beta$  проставлены около кривых. В случае  $R = 1$  при  $\beta = 0.991$  достигается максимум частоты отсечки  $\Omega_+(0)$ . В области, где  $\Omega_-(\kappa_{\parallel}) < 0$ , медленная ветвь неустойчива.

ствуем (15). Пример из области  $0 < R < 2\gamma$  показан на рис. 2б.

Наконец, в случае  $R > 2\gamma$  (не показан на рисунке) функция  $h(\beta)$  опять становится проще – она монотонно убывает. Начало быстрой ветви фиксировано в начале координат, да и вся ветвь мало меняется при изменении  $\beta$ . Наоборот, начало нижней ветви быстро уходит вниз по отрицательной полуоси, и область неустойчивости быстро расширяется.

## 9. О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ ПОЛОИДАЛЬНЫХ АЛЬВЕНОВСКИХ ВОЛН

Анализ дисперсионного уравнения (14) в плоскости  $\kappa_{\parallel}^2, \omega^2$  показывает, что при вещественных  $\omega$  возможно появление областей, где  $\kappa_{\parallel}^2 < 0$  (кривые на рис. 1 для  $R < 2\gamma(1 - u_c) = 1.818$ ). Эти области непрозрачны для альвеновских волн. Расположение таких областей на силовой линии оценивалось в работе [Mager et al., 2009]. При этом в качестве дисперсионного уравнения использовалась асимптотика (16) при  $\sin^2\alpha = 1$ , которую можно

представить в виде  $\kappa_{\parallel}^2(s) = [\omega^2 - \omega_g^2(s)]V_A^{-2}$ , где  $s$  – координата вдоль силовой линии, и

$$\omega_g^2 = V_A^2\beta\kappa_c(2\gamma\kappa_c - \kappa_p) = 2P\rho^{-1}\kappa_c(2\gamma\kappa_c - \kappa_p). \quad (26)$$

Если в (26) слагаемое  $2\gamma\kappa_c$  доминирует над  $\kappa_p$ , то это приводит с учетом постоянства давления вдоль силовой линии к оценке  $\omega_g^2(s) \propto \kappa_c^2(s)\rho(s)^{-1}$ . Поскольку кривизна силовой линии  $\kappa_c(s)$  в направлении к экватору возрастает, а плотность  $\rho(s)$  при этом убывает, то в приэкваториальной области может возникнуть область непрозрачности для альвеновских волн, разделяющая силовую линию на два независимых альвеновских резонатора, примыкающие к ионосферам. Это произойдет, если достигаемый на экваторе  $\max \omega_g^2 > \omega^2$ . Таким образом, приэкваториальная область с большими  $\beta$  и  $\kappa_c$  может нарушать сопряженность колебаний в разных полушариях.

Отметим, что аналогичная оценка в работе [Сафаргалеев и Мальцев, 1986] привела к прямо противоположному выводу – в экваториальной части силовой линии должна находиться область прозрачности. Однако этот вывод следует признать ошибочным, так как этими авторами был



опущен множитель  $\beta$  в (26), растущий вдоль силовой линии при удалении от Земли.

### 10. ОБСУЖДЕНИЕ: СОПОСТАВЛЕНИЕ С СООТНОШЕНИЯМИ ИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ РАБОТ

Описание баллонной неустойчивости, проведенное [Ohtani and Tamao, 1993] в приближении ВКБ ( $\propto \exp(ik_y y + ik_{\parallel} s)$ ) при пренебрежении радиальной структурой возмущения ( $k_n \rightarrow 0$ ) привело к пороговому условию  $\kappa_c(\kappa_p - \kappa_c - \kappa_B) > k_{\parallel}^2(1 + \beta^{-1})$ . Однако, в этой статье уравнение (13) (для частного случая  $\sin^2 \alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ ) приведено с ошибкой: отсутствует последнее слагаемое в левой части. Ошибка возникла из-за неточно выписанной проекции на  $\mathbf{e}_3$  слагаемого  $\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{B})$  в первом уравнении (5) [Liu, 1997]. Отсутствие указанного слагаемого радикально меняет оценку знаков корней уравнения (13), т.е. анализ устойчивости. Коэффициент при  $\omega^2$  в (13) убывает с ростом  $k_{\parallel}^2$ , обращаясь в нуль при (полагаем здесь  $\sin^2 \alpha = 1$ )

$$k_{\parallel}^2 = k_0^2 = \kappa_c(\beta\kappa_p V_A^2 - 4\kappa_c V_c^2)(V_A^2 + V_c^2)^{-1} = \beta\kappa_c\kappa_p\gamma(1 + \gamma\beta)^{-1}(1/\gamma + \beta/2 - 2\kappa_c/\kappa_p), \quad (27)$$

т.е. при  $k_{\parallel}^2 < k_0^2$  этот коэффициент положителен, и сумма корней уравнения (13) отрицательна. В статье [Ohtani and Tamao, 1993] свободный член уравнения (13) положителен, т.е. оба его корня  $\omega_{\pm}^2$  имеют одинаковый знак, и при  $k_{\parallel}^2 < k_0^2$  оба корня оказываются отрицательными, что привело этих авторов к неверному выводу о неустойчивости обеих ветвей. На самом деле свободный член в (13) становится при  $k_{\parallel}^2 < \beta\kappa_c\kappa_p$  отрицательным, то есть при этом условии  $\omega_-^2 < 0$ , а  $\omega_+^2 > 0$ . В области же  $k_{\parallel}^2 < \beta\kappa_c\kappa_p$  и сумма, и произведение корней положительные, т.е.  $\omega_{\pm}^2 > 0$  — обе ветви устойчивы.

В работе [Miura et al., 1989] в приближении ВКБ по поперечным координатам получена система зацепленных дифференциальных по продольной координате уравнений для связанных альвеновской и медленной магнитозвуковой мод. Однако авторы не решают полученную систему в общем виде, а пытаются выделить альвеновскую моду. Для этого они полагают  $\delta v_{\parallel} \rightarrow 0$ , что должно, по их мнению, исключить ММЗ моду. Из полученного ими локального дисперсионного уравнения получается условие неустойчивости альвеновских (!) колебаний. Противоречие между выводом [Miura et al., 1989] и данной работой связано со следующим обстоятельством. Если в по-

лоидальной системе (11) положить  $u = 0$ , то в силу соотношения (ПЗ), это эквивалентно предположению  $\xi_{\parallel} = 0$ , то есть  $\delta v_{\parallel} = 0$ . Тогда первое уравнение системы (11) действительно превращается в уравнение [Miura et al., 1989], для которого локальное дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = V_A^2(k_{\parallel}^2 - \beta\kappa_c\kappa_p), \quad (28)$$

откуда формально следует возможность неустойчивости альвеновской ветви при условии (1). Однако предположение  $u = 0$  оказывается несогласованным со вторым уравнением (11), так как при этом из этого уравнения получается лишь тривиальное решение  $\xi_1 = 0$ . Анализ же точного дисперсионного соотношения (13) в полоидальном пределе  $k_i = 0$ , показывает, что никакая ветвь  $\omega^2(k_{\parallel}^2)$  не может пересекать линию  $\omega^2 = V_c^2 k_{\parallel}^2$ , а соотношение (28) противоречит этому условию. Таким образом, альвеновская ветвь  $\omega_+^2$  находится выше линии  $\omega^2 = V_c^2 k_{\parallel}^2$  при любом  $k_{\parallel}^2$ . Поэтому альвеновская ветвь всегда устойчива:  $\omega_+^2 \geq 0$ , и вывод о возможной неустойчивости этой ветви является принципиально ошибочным.

В литературе встречается и ряд более мелких погрешностей. В обзоре [Golovchanskaya and Kullen, 2005] приведено дисперсионное соотношение для  $\omega_+^2$  (уравнение (2)), сопоставление которого с асимптотикой (16) показывает, что оно корректно только в пределе  $\beta \rightarrow 0$ . В более ранней работе [Сафаргалеев и Мальцев, 1986] было выведено аналогичное дисперсионное соотношение, относящееся к коротковолновому пределу  $k_{\parallel} \rightarrow \infty$ . Однако оно не применимо даже при малых  $\beta$ , так как отличается вдвое меньшим коэффициентом при  $\kappa_c$ .

В данной работе мы ограничились идеальной МГД и при этом пренебрегли дрейфовыми членами  $|\omega| \gg |\omega^*|$ . Дрейфовые эффекты могут приводить к некоторому понижению порога конвективной неустойчивости [Похотелов и др., 1980].

Оцененные критерии неустойчивости имеют качественный характер из-за использования ВКБ-приближения в продольном направлении при выводе соответствующих дисперсионных уравнений. В экваториальном плазменном слое магнитосферы на предварительной фазе суббури кривизна становится настолько велика, что применимость приближения ВКБ становится проблематичной. Тем не менее, условие неустойчивости (15) согласуется при  $\beta R > 1$  с требованием  $k_{\parallel}^2 > k_c^2$ . В то же время, последнее условие является слишком жестким, и по-видимому следует го-

ворить о медленном изменении кривизны по сравнению с длиной волны.

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено дисперсионное уравнение из исходной системы для зацепленных МГД мод в асимптотическом случае мелкомасштабных возмущений, что позволило уточнить соотношения, полученные в предшествующих работах. В отличие от выводов ряда авторов показано, что быстрая зацепленная ветвь колебаний (альвеновского типа) оказывается всегда устойчивой. В областях с резким спаданием по радиусу давления горячей плазмы, удерживаемой сильно искривленными магнитными силовыми линиями, возможна неустойчивость медленной (ММЗ типа) ветви колебаний. В то же время при частотах альвеновских волн ниже частоты отсечки (25) возникает область непрозрачности, и распространение полоидальных альвеновских волн вдоль всей силовой линии становится невозможным.

Выражаем признательность рецензенту за конкретные деловые замечания. Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 11-02-90491 и Программы фундаментальных исследований № 7 ОНЗ РАН.

### Приложение: Связь продольного смещения и сжатия плазмы

Проекция первого и третьего уравнений (5) соответственно на  $\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{e}_1$  имеют вид  $\nabla_3 p = \omega^2 \rho \xi_3 - J b_1$  и  $b_1 = \nabla_3 (B \xi_1)$ , откуда находим

$$\nabla_3 p = \omega^2 \rho \xi_3 - J \nabla_3 (B \xi_1). \quad (\text{П1})$$

С другой стороны, второе уравнение (5) можно представить, учитывая условие равновесия (3), в виде  $p = -\gamma P u - \nabla_1 P \xi_1 = -\gamma P u - J B \xi_1$ , откуда, применяя оператор  $\nabla_3$ , получаем

$$\nabla_3 p = -\gamma P \nabla_3 u - J \nabla_3 (B \xi_1) - (B \nabla_3 J) \xi_1. \quad (\text{П2})$$

Важным свойством тока  $J$  является постоянство его величины вдоль силовых линий, в чем можно убедиться, воспользовавшись коммутационным соотношением (2) и условиями равновесия (3). Поэтому в правой части (П2) последний член реально отсутствует, так что из уравнений (П1) и (П2) сразу получается соотношение

$$\xi_3 = -k_s^{-2} \nabla_3 u. \quad (\text{П3})$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Кадомицев Б.Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы. Т. 2. С. 132–176. М.: Госатомиздат, 1963.
- *Михайловский А.Б.* Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М.: Атомиздат, 296 с. 1978.
- *Похотелов О.А., Булошников А.М., Пилипенко В.А.* Гидромагнитная устойчивость внешней границы захваченной радиации // Геомагнетизм аэронаука. Т. 20. С. 419–424. 1980.
- *Сафаргалеев В.В., Мальцев Ю.П.* Внутренние гравитационные волны в плазменном слое // Геомагнетизм аэронаука. Т. 26. С. 220–223. 1986.
- *Agapitov A.V., Cheremnykh O.K., Parnowski A.S.* Ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth: spectrum, stability and eigenmode analysis // Adv. Space Res. V. 41. P. 1682–1690. 2007.
- *Cheremnykh O.K., Parnowski A.S.* The theory of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // Adv. Space Res. V. 33. P. 769–773. 2004.
- *Cheng C.Z.* MHD field line resonances and global modes in three-dimensional magnetic fields // J. Geophys. Res. V. 107. doi:10.1029/2002JA009470. 2002.
- *Golovchanskaya I.V., Kullen A.* Ballooning-type instabilities and waves in the Earth's magnetosphere (review) // Proc. of 28-th Annual Seminar. Apatity. P. 93–99. 2005.
- *Golovchanskaya I.V., Maltsev Yu.P.* On the identification of plasma sheet flapping waves observed by Cluster // Geophys. Res. Lett. V. 32. L02102, doi:10.1029/2004GL021552. 2005.
- *Golovchanskaya I.V., Mingalev O.V.* Propagation of the ballooning waves in the Earth's magnetotail // Proc. of 29-th Annual Seminar. Apatity. P. 126–132. 2006.
- *Klimushkin D.Yu.* Theory of azimuthally small-scale hydromagnetic waves in the axisymmetric magnetosphere with finite plasma pressure // Ann. Geophys. V. 16. P. 303–321. 1998.
- *Liu W.W., Xu B.-L., Samson J.C., Rostoker G.* Theory and observations of auroral substorms: A magnetohydrodynamic approach // J. Geophys. Res. V. 100. P. 79–95. 1995.
- *Liu W.W.* Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited // J. Geophys. Res. V. 102. P. 4927–4931. 1997.
- *Mager P.N., Klimushkin D.Yu., Pilipenko V.A., Schäfer S.* Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma // Ann. Geophys. V. 27. P. 3875–3882. 2009.
- *Miura A., Ohtani S., Tamao T.* Ballooning instability and structure of diamagnetic waves in a model magnetosphere // J. Geophys. Res. V. 94. P. 15231–15242. 1989.
- *Ohtani S., Tamao T.* Does the ballooning instability trigger substorms in the near-Earth magnetotail? // J. Geophys. Res. V. 98. P. 19369–19379. 1993.
- *Zhu P., Raeder J., Germaschewski K., Hegna C.C.* Initiation of ballooning instability in the near-Earth plasma sheet prior to the 23 March 2007 THEMIS substorm expansion onset // Ann. Geophys. V. 27. P. 1129–1138. 2009.